Алгебраические модели нечетких интеллектуальных систем с использованием (max-prod)-композиции

И. В. Клейменов, e-mail: alenor96@gmail.com
С. Д. Махортов, e-mail: msd_exp@outlook.com

Воронежский государственный университет

Аннотация. *В настоящей работе описываются алгебраические системы, моделирующие интеллектуальные системы с нечеткими правилами. Рассматривается использование (max-prod)-композиции нечетких отношений для моделирования нечеткого логического вывода и построение логического замыкания для данных отношений. В результате работы обосновывается актуальность нового определения композиции нечетких отношений при решении ряда задач, в частности задач о назначениях.*

Ключевые слова: *алгебраическая система, нечеткие продукции, логическая редукция, FLP-структура, (max-prod) композиция, логическое замыкание.*

Введение

Построение и исследование формальных моделей компьютерных систем основываются на алгебраических структурах [1]. Это в полной мере относится и к инженерии знаний, включающей широко распространенные на практике продукционные системы [2-4].

Ранее был получен ряд результатов, связанных с логическими системами продукционного типа. Разработана основанная на алгебраических решетках теория LP-структур (lattice production structures) [5], позволяющая решать задачи эквивалентных преобразований, верификации и минимизации баз знаний. Предложен и исследован метод обратного логического вывода (релевантный LP-вывод) [6], позволяющий снизить число обращений к внешним источникам информации. На основе этих работ разработана теория LP-структур с нечетким логическим отношением (FLP-структуры), введено понятие логической редукции FLP-структуры, доказаны теоремы о ее существовании и способе построения [7]. Для прикладных систем они обосновывают эквивалентную минимизацию нечетких баз знаний.

В настоящей работе продолжается рассмотрение теории FLP-структур, в частности предлагается альтернативный подход к построению алгебраической системы с нечеткими правилами позволяющий более эффективно решать определенные классы задач, например задачи о назначениях.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-07-00037.

1. Актуальность (max-prod)-композиции

Рассмотрим простой пример задачи, в которой необходимо эффективно распределить сотрудников по рабочим местам на основании теста, который присваивает численное значение навыкам сотрудников. Пусть имеются три сотрудника A, B и C, три рабочих места «грузчик», «продавец-консультант» и «бухгалтер», и четыре характеристики «физическая сила», «коммуникативность», «инициативность» и «внимательность». Каждое из рабочих мест имеет собственных коэффициент для характеристики работника, который отображает, насколько тот или иной навык важен для профессии. Запишем эти требования в виде бинарного отношения – таблицы.

	Физ. сила	Коммуник.	Инициативность	Внимательность.
Грузчик	0.8	0.3	0.5	0.6
Продавец-консультант	0.3	0.8	0.7	0.6
Бухгалтер	0.3	0.5	0.5	0.9

Табл. 1. Требования профессий к характеристикам работников

Далее в таком же виде представим результаты теста, пройденного кандидатами на рабочие места.

	A	B	C
Физ. сила	0.5	0.4	0.9
Коммуник.	0.7	0.9	0.2
Инициативность	0.7	0.9	0.6
Внимательность	0.9	1	0.5

Табл. 2. Характеристики работников

Попробуем найти композицию данных отношений, чтобы определить наилучших кандидатов на каждое место. Для этого будем использовать формулу композиции отношений, предложенную в работе [7], а именно (max-min)-композицию:

$$\mu_{R^2}(a,c) = \max(\min(\mu_R(a,b), \mu_R(b,c))).$$

Получим следующий результат:

	A	B	C
Грузчик	0.6	0.6	0.8
Продавец-консультант	0.7	0.8	0.6
Бухгалтер	0.9	0.9	0.5

Табл. 3. Коэффициент эффективности кандидатов на рабочих местах

Согласно полученному результату, наиболее эффективным распределением кандидатов будет следующее: А – бухгалтер, В – продавец-консультант и С – грузчик. Данное распределение не учитывает тот факт, что работник В превосходит работника А по всем важным для бухгалтера характеристикам, и присваивает им одинаковый коэффициент эффективности. При решении такого рода задачи, (max-min) композиция позволяет находить минимально подходящего кандидата, но не самого эффективного.

Рассмотрим альтернативный способ вычисления композиции отношений, а именно через максимум и произведение –

$$\mu_{R^2}(a,c) = \max(\mu_R(a,b) * \mu_R(b,c)).$$

Получим следующий результат:

	A	B	C
Грузчик	0.54	0.6	0.72
Продавец-консультант	0.56	0.72	0.42
Бухгалтер	0.81	0.9	0.35

Табл. 4. Коэффициент эффективности кандидатов на рабочих местах, рассчитанный с применением (max-prod)-композиции

Сравнивая полученный результат со значениями в Табл. 3, можно заметить, что кандидат В теперь имеет больший коэффициент эффективности, чем кандидат А. Следовательно, распределение кандидатов будет выглядеть следующим образом: А – продавец-консультант, В – бухгалтер и С – грузчик. При решении данной задачи, (max-prod)-композиция позволила увеличить влияние характеристик кандидатов на конечное распределение их по профессиям, сделав его более эффективным.

На основе приведенных выше результатов можно утверждать об актуальности применения (max-prod)-композиции для решения, например задач о назначениях.

2. Замыкания и преобразования FLP-структур

Напомним основные понятия FLP-структур, приведенные в [7].

Нечеткое множество $A = (F, \mu_F)$ определяется функцией принадлежности $\mu_F : F \to [0,1]$ на некотором (обычном) множестве F. Значение $\mu_F(a)$ называется степенью принадлежности a к F. Нечеткое бинарное отношение R на множестве F – это нечеткое множество упорядоченных пар элементов из F с заданной функцией принадлежности $\mu_R : F \times F \to [0,1]$. Эти отношения обладают свойствами рефлективности, симметричности и транзитивности [8]. Кроме того, в работе [7] вводится свойство дистрибутивности отношения нечеткого бинарного отношения.

Для моделирования нечеткого логического вывода будем использовать (max- prod)-композицию. Для отношения R на множестве F композиция $R^2 = R \circ R$ определяется так:

$$\mu_{R^2}(a,c) = \max(\mu_R(a,b) * \mu_R(b,c)), \text{ где } a,b,c \in F.$$

Покажем, что для данной композиции свойство транзитивности эквивалентно вложению $\mathrm{R}^2 \subseteq R$.

Согласно свойству транзитивности, $\mu_R \geq \max(\mu_R(a,b), \mu_R(b,c))$.

$$\mu_{R^2}(a,c) = \max(\mu_R(a,b) * \mu_R(b,c)) \leq max(\mu_R(a,b), \mu_R(b,c)) \Longrightarrow$$

$$\mu_{R^2}(a,c) \leq \mu_R \Longrightarrow R^2 \subseteq R$$

Логическим замыканием нечеткого отношения R называется наименьшее логическое отношение, содержащее R. Данное отношение представляет собой полный набор логических выводов, возможных в моделируемой продукционной системе. Для того чтобы показать его существование, работа [7] вводит определение отношения логической связи. Перепишем его, заменив последнее правило вычисления этого отношения таким образом, чтобы оно коррелировало с определением (max-prod)-композиции.

Определение 1. Пусть задано нечеткое отношение R на решетке $\mathbb{F}$. Отношение R логической связи пар $A, B \in \mathbb{F}$ определяется функцией принадлежности $\overline{\mu}_R$, значение $\overline{\mu}_R(A,B)$ которой вычисляется как *максимальное* из следующих вариантов его вычисления:

1. $\mu_R(A,B) = \mu_R(A,B)$;

2. если $A \supseteq B$, то $\mu_R \; A,B \; = 1$, иначе = 0;
3. $\mu_R(A,B) = \mu_R \; A,B_1 \; * \mu_R(A,B_2)$ ($\forall B_1,B_2 : B_1 \cup B_2 = B$);
4. $\mu_R \; A,C \; = \mu_R \; A,C \; * \mu_R(C,B)$ ($\forall C \in \mathbb{F}$).

Рекурсивное определение 2.1 по данному R задает новое нечеткое отношение R на решетке $\mathbb{F}$, которое содержит R, $\supseteq$, а также обладает дополнительными свойствами. Условия 1)-4) называются правилами вывода логических связей, где правило 3) называется *дистрибутивным*, а правило 4) – *транзитивным*.

Шагом вывода логической связи называется последовательное применение ровно одного правила к конечному множеству элементов решетки. Например:

если $B_{1,t} \cup B_{2,t} = B_t, \mu_R(A_t, B_{1,t}) > 0, \mu_R(A_t, B_{2,t}) > 0$,
то $\mu_R \; A_t, B_t \; = \mu_R \; A_t, B_{1,t} \; * \mu_R \; A_t, B_{2,t} \; , t \in T$;
если $\mu_R(A_t, C_t) > 0, \mu_R(C_t, B_t) > 0$,
то $\mu_R(A_t, B_t) = \mu_R \; A_t, C_t \; * \mu_R(C_t, B_t), t \in T$.

Количество шагов вывода, необходимое для вычисления $\overline{\mu}_R(A,B)$, называется уровнем рекурсии, при этом учитываются лишь применения рекурсивных правил 3)-4). В случае логической связи, основанной только на применении правил 1) и 2), уровень рекурсии равен нулю.

Докажем лемму о существовании логического замыкания, используя новые правила.

Лемма. Пусть R – логическое отношение на решетке F, и $A, B \in F$. Тогда справедливо $\mu_R \; A,B \; = \mu_R \; A,B$, то есть $R = R$.

Доказательство. Проведем его с помощью индукции по m-уровню рекурсии в вычислении $\mu_R \; A,B$. При $m = 0$ имеет место одно из условий 1)-2) определения 1.1. Случай 1) означает справедливость доказываемого утверждения. В случае 2) $\mu_R \; A,B \; = 1 = \mu_R \; A,B$, поскольку логическое отношение R содержит и $\supseteq$.

Предположим далее, что лемма верна для некоторого $m \geq 0$, и докажем ее утверждение при уровне рекурсии $m + 1$. В этом случае новые для рассмотрения варианты могу дать правила 3)-4).

Рассмотрим вариант, когда $\mu_R \; A,B$ строится с применением правила 3) определения 1.1. По предположению индукции $\mu_R \; A,B_1 \; = \mu_R \; A,B_1$, $\mu_R \; A,B_2 \; = \mu_R \; A,B_2$. Используя свойство дистрибутивности, получим следующую систему уравнений:

$$\mu_R(A,B) = \mu_R \; A,B_1 \; * \mu_R \; A,B_2 \; \leq min(\mu_R \; A,B_1 \; , \mu_R \; A,B_2 \;) \; \forall \mu_R \in [0,1]$$
$$\mu_R(A,B) \geq min(\mu_R \; A,B_1 \; , \mu_R \; A,B_2 \;)$$

Так как $R \supseteq R$, то $\mu_R(A,B) \geq \mu_R(A,B)$, следовательно, $\mu_R \; A,B \; = \mu_R \; A,B$ и $R = R$.

Если величина $\mu_R\ \ A,B$ строится с применением правила 4), то будем использовать свойство транзитивности нечетких отношений. Получим

$$\mu_R\ \ A,C\ \ = \mu_R\ \ A,C\ \ * \mu_R(B,C)\ \le max(\mu_R\ \ A,B\ \ , \mu_R\ \ B,C\ \ )\forall \mu_R \in [0,1]$$
$$\mu_R(A,\mathrm{C}) \ge max(\mu_R\ \ A,B\ \ , \mu_R\ \ B,C\ \ )$$

Аналогично предыдущему случаю, так как R содержит R, $\mu_R\ \ A,B\ \ = \mu_R\ \ A,B$ и $R = R$.

Теорема. Для произвольного отношения R на решетке F логическое замыкание существует и совпадает с нечетким отношением логической связи R, определяемым функцией принадлежности $\mu_R\ \ A,B\ \ = \mu_R\ \ A,B$

Доказательство. Покажем, что для произвольного R отношение R является логическим. Будем использовать правила из определения 1

5. По правилу 2) оно содержит включение
6. По правилу 3) оно дистрибутивно
7. Покажем транзитивность: $\mu_R(A,B) \ge max(\mu_R\ \ A,C\ \ , \mu_R\ \ C,B\ \ )$. По правилу 4) $\mu_R\ \ A,B\ \ = \mu_R\ \ A,B\ \ = \mu_R\ \ A,C\ \ * \mu_R(C,B) \le max(\mu_R\ \ A,C\ \ , \mu_R\ \ C,B\ \ )$.
8. По правилу 1) R содержит R.

Пусть R_2 — произвольное логическое отношение, содержащее R. Тогда $R \subseteq R_2 \Longrightarrow R \subseteq R_2$, при этом $R_2 = R_2$. Следовательно, построенное в определении 1 отношение R содержится в произвольно выбранном R_2, и представляет собой наименьшее логическое отношение, содержащее R.

Заключение

В настоящей работе предложен альтернативный способ вычисления композиции нечетких множеств – (max-prod) композиция. Описан род задач, в которых данный способ показывает себя более эффективным, произведено сравнение результатов. Рассмотрены базовые вопросы о существовании логического замыкания в нечетких отношениях, построенных с использованием (max-prod)-композиции. Основываясь на показанных результатах, можно говорить о релевантности применения модифицированных FLP-структур для решения определенного класса задач, в частности задачи о назначениях.

Список литературы

1. Бениаминов Е. М. Алгебраические методы в теории баз данных и представлении знаний / Е. М. Бениаминов. – М. : Научный мир, 2003. – 184 с.

2. Жожикашвили А.В. Алгебраическая теория продукционных систем / А.В. Жожикашвили, В.Л. Стефанюк // VIII нац. конф. по искусственному интеллекту с международным участием КИИ-2002: Труды конференции. Т. 1. – М. : Физматлит, 2002. – С. 428–436.

3. Maciol A. An application of rule-based tool in attributive logic for business rules modeling / A. Maciol // Expert Systems with Applications. – 2008. – V. 34, #3. – Pp. 1825–1836.

4. Дородных Н.О. Использование диаграмм классов UML для формирования продукционных баз знаний / Н.О. Дородных, А.Ю. Юрин // Программная инженерия. – 2015, №4. – С. 3–9.

5. Махортов С.Д. Математические основы искусственного интеллекта: теория LP-структур для построения и исследования моделей знаний продукционного типа / С.Д. Махортов ; Под ред. В. А. Васенина. – М. : Издательство МЦНМО, 2009. – 304 с.

6. Болотова С.Ю. Алгоритмы релевантного обратного вывода, основанные на решении продукционно-логических уравнений / С.Ю. Болотова, С.Д. Махортов // Искусственный интеллект и принятие решений. – 2011, №2. – С. 40–50.

7. Махортов С.Д. О логической редукции алгебраической модели интеллектуальной системы с нечеткими правилами / С.Д. Махортов, И.В. Клейменов // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – Воронеж, 2019. – № 3. – С. 67–78.

8. Рыжов А.П. Элементы теории нечетких множеств и ее приложений / А.П. Рыжов. – М. : Диалог-МГУ, 2003. – 81 с.